WS 2002/03 Prof. R. Wattenhofer / Ruedi Arnold, Fabian Kuhn

Vernetzte Systeme
Übung 8

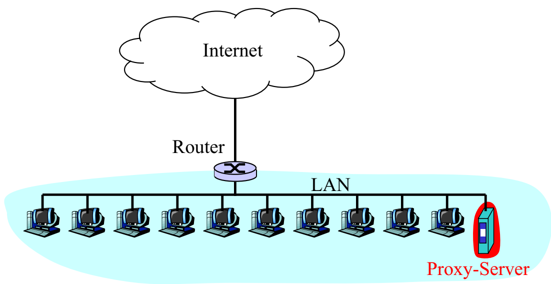
Ausgabe: **11. Dezember 2002**
Abgabe: **6. Januar 2003**

Bitte schreiben Sie immer Ihre(n) Namen auf die Lösungsblätter.

1 Proxy Server und Warteschlangen (9 Punkte)

Im Internet können Pakete verzögert werden, wenn Stauungen auftreten, wie bei stark belasteten Routern. In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie Warteschlangen theoretisch modelliert werden können.

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns nun mit einem konkreten Beispiel dazu. Die Ausgangslage ist wie folgt: Die Firma BestWeb hat einige Rechner am internen LAN, welche unabhängig voneinander Pakete verschicken, die an Empfänger im Internet gerichtet sind. Der gesamte Verkehr zum Internet muss den Router (Gateway) zum Internet passieren (siehe Skizze). Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Ankunftszeiten beim Router Poissonverteilt (Markov) sind, mit Parameter $\lambda = 99s^{-1}$. Die Zeit, die der Router benötigt, um ein Paket ins Internet weiterzuleiten sei Exponentialverteilt (Markov) mit Parameter $\mu = 100s^{-1}$. Dieser Router und die dort entstehenden Verzögerungen interessieren uns in dieser Aufgabe.



a) (1 Punkt) Ist das System stabil? Oder anders: Ist der Router in der Lage, die ankommenden Pakete ins Internet weiterzuleiten?

b) (1 Punkt) Wieviele Pakete sind durchschnittlich im Gateway?

c) (1 Punkt) Wie viele Sekunden ist ein Paket durchschnittlich im Router?

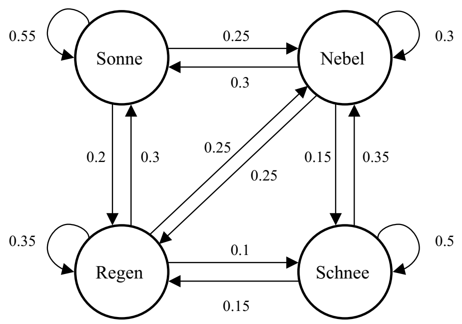
d) (2 Punkte) Wie gross ist die durchschnittliche Zeit, die ein Paket in der Warteschlange im Gateway ist?

e) (2 Punkte) Nehmen Sie nun an, BestWeb installiere einen Proxy-Server. Alle Pakete passieren nun zuerst den Proxy-Server. Dieser kann leider nur $\frac{1}{11}$ der Pakete direkt beantworten, die andern müssen weiterhin über den Router ins Internet weitergeleitet werden. Wieviele Pakete sind nun durchschnittlich im Router?

f) (2 Punkte) Wie lange ist nun ein Paket durchschnittlich im Router? Welchen Faktor an Zeit hat BestWeb mit dem Proxy-Server also gegenüber der Lösung ohne Proxy eingespart?

2 Markovprozess und Wetterprognose (6 Punkte)

Im Dezember ist es in Zürich oft neblig. In dieser Aufgabe wollen wir bestimmen, wie viele Tage pro Jahr Nebel das Wetter beherrscht. Vereinfachend nehmen wir an, dass es vier Wetterzustände gibt, nämlich Sonne, Nebel, Regen und Schnee. Und das Wetter wechsle nur von Tag zu Tag. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind im folgenden Zustandsdiagramm gegeben:

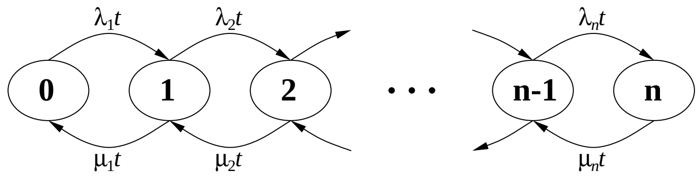


Der Graph sagt also zum Beispiel, dass nach einem sonnigen Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ein Regentag folgt und mit Wahrscheinlichkeit 0.55 wieder ein sonniger Tag; auf einen sonnigen Tag folgt nie ein Tag, an dem es schneit.

Unser einfaches Wettermodell habe sich nun über lange Zeit eingespielt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Tag ein Nebeltag ist? (Hinweis: Zum Lösen von Gleichungssystemen können Sie Mathematikprogramme wie Matlab oder Maple benutzen.)

3 Birth-Death-Markov-Prozesse (12 Punkte)

In der Vorlesung (Folie 3/88) wurden Birth-Death-Markov-Prozesse behandelt. In dieser Aufgabe wollen wir diese etwas vertiefen. Bei Birth-Death-Prozessen können die Zustände linear angeordnet werden, wobei Zustandsübergänge nur zwischen benachbarten Zuständen möglich sind. Die folgende Figur verdeutlicht dieses Szenario.



a) (4 Punkte) In einem ersten Schritt wollen wir eine allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeiten (p_i sei die Wahrscheinlichkeit, dass man in Zustand i ist) aller Zustände im Gleichgewicht (Equilibrium) betrachten. Zeigen Sie, dass folgende Formel allgemein gilt:

$$p_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ \cdots \ \cdot \mu_i} p_0.$$

Tip: Betrachten Sie die Gleichgewichtsbedingung für jeden Zustand. Die Wahrscheinlichkeit, dass man in einen Zustand kommt, muss gleich gross sein wie die Wahrscheinlichkeit, dass man ihn verlässt.

b) (2 Punkte) Wir wollen nun ein konkretes Beispiel betrachten. Nehmen Sie an, das Kader einer Fussballmannschaft bestehe aus n Spielern. In einem Einheitszeitintervall werden, unabhängig voneinander, gesunde Spieler mit der Wahrscheinlichkeit μ krank und kranke Spieler mit der Wahrscheinlichkeit λ wieder gesund. Stellen Sie einen Birth-Death-Markov-Prozess für dieses Szenario auf, wobei die Zustände die Anzahl der gesunden Spieler ausdrücken sollen (Zustand i heisst exakt i Spieler sind gesund).

c) (4 Punkte) Leiten Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit her, dass genau i Spieler gesund sind.

d) (2 Punkte) Als konkrete Werte nehmen wir nun $n = 20$, $\lambda = 0.25$ und $\mu = 0.1$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft spielfähig ist, das heisst mindestens 11 Spieler gesund sind?