Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Distributed Computing Group

AS 2007

Prof. Dr. Roger Wattenhofer, Stefan Schmid, Roland Flury

# Prüfung
# Diskrete Ereignis Systeme

Mittwoch, 23.Januar 2008
9:00 – 12:00

**Nicht öffnen oder umdrehen bevor die Prüfung beginnt!**

Die Prüfung dauert 180 Minuten und es gibt insgesamt 180 Punkte. Die Anzahl Punkte pro Teilaufgabe steht jeweils in Klammern bei der Aufgabe. Sie dürfen die Prüfung englisch oder deutsch beantworten. Begründen Sie alle Ihre Antworten und beschriften Sie Skizzen und Zeichnungen verständlich. Schreiben Sie zu Beginn Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer in das folgende dafür vorgesehene Feld.

| Name | Legi-Nr. |
|---|---|
| | |

## Punkte

| Frage Nr. | Erreichte Punkte | Maximale Punkte |
|---|---|---|
| 1 | | 68 |
| 2 | | 35 |
| 3 | | 20 |
| 4 | | 25 |
| 5 | | 32 |
| Total | | 180 |

# 1 Sprachen (68 Punkte)

**A)** [8] Gegeben sind zwei Sprachen $L1$ und $L2$, wobei $L1$ eine echte Teilmenge von $L2$ ist: $L1 \subset L2$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort zu den folgenden Fragen.

**1)** [4] Ist es möglich dass $L1$ regulär ist, und $L2$ nicht?

**2)** [4] Ist es möglich dass $L2$ regulär ist, und $L1$ nicht?

**B)** [12] Wir betrachten nun Pushdown Automaten mit leicht unterschiedlichen Fähigkeiten. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort zu den folgenden Fragen.

Welche Klasse von Sprachen kann mit einem Pushdown Automaten mit ...

**1)** [3] ... einem *endlich grossen* Stack beschrieben werden?

**2)** [3] ... konstant vielen *endlich grossen* Stacks beschrieben werden?

**3)** [3] ... einem *unendlich grossen* Stack beschrieben werden?

**4)** [3] ... konstant vielen *unendlich grossen* Stacks beschrieben werden?

**C)** [32] Im Folgenden betrachten wir die Sprache
$\mathcal{L} = \{x\#y \mid x, y \in \{a|b\}^*, x \text{ ist } \textit{keine} \text{ Permutation von } y\}$.

**1)** [15] Zeichnen Sie einen Pushdown Automaten der $\mathcal{L}$ erkennt. Beschreiben Sie zusätzlich die Funktionsweise Ihres Automaten kurz in Worten.

**2)** [2] Ist $\mathcal{L}$ kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

**3)** [15] Zeichnen Sie eine Turing Maschine, welche alle Wörter der Sprache $\mathcal{L}$ erkennt. Zu Beginn ist das Wort (welches immer die form $\{a|b\}^+\#\{a|b\}^+$ aufweist) auf das Turing Band geschrieben und der Lesekopf zeigt auf das erste Zeichen, siehe Figure 1. Am Ende soll die Zelle unter dem Lesekopf die Zahl Eins enthalten, falls das Wort in $\mathcal{L}$ enthalten ist, ansonsten die Zahl Null. Beschreiben Sie zusätzlich den Ablauf Ihres Programmes kurz in Worten.

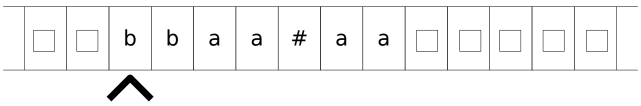


Figure 1: Turing Band mit dem Wort $bbaa\#aa$. Der Lesekopf zeigt zu Beginn auf das erste Zeichen des Wortes.

**D)** [16] Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{w \in (0|1)^* \mid w \text{ enthält gleich viele 0 wie 1}\}$.

**1)** [4] Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die $\mathcal{L}$ beschreibt.

**2)** [8] Zeichnen Sie ein Petri Netz auf, welches $\mathcal{L}$ erkennt.

**3)** [4] Ist Ihr Petri Netz *live*? Ist es *k-bounded* für ein bestimmtes $k$? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 2 Basketball (35 Punkte)

Mario, Luigi, und Trudy treffen sich zu einem Basketball Wettkampf, bei dem sie möglichst viele Körbe werfen sollen. Mario schlägt folgendes Spiel vor: Jeder Spieler muss $m$ mal den Korb treffen, und nach jedem Fehlwurf 10 Liegestützen machen.

**A)** [5] Nehmen Sie an, dass Mario jeweils mit konstanter Wahrscheinlichkeit $p$ trifft. Wie viele Liegstützen muss er bei seinem Spiel im Erwartungswert machen?

**B)** [5] Luigi ist ehrgeiziger und will $m$ Körbe *in Serie* werfen. Nach jedem Fehlwurf macht er ebenfalls 10 Liegestützen und versucht dann erneut, die $m$ Körbe in Serie zu werfen. Wie viele Liegestützen macht Luigi im Erwartungswert, wenn er den Korb ebenfalls mit konstanter Wahrscheinlichkeit $p$ trifft?

**C)** [25] Trudy übernimmt Luigis Spiel und versucht ebenfalls $m$ Körbe in Serie zu werfen. Trudy ist aber etwas launisch und gibt auf wenn sie in zwei aufeinander folgenden Versuchen den Korb verfehlt. Trudy trifft den Korb ebenfalls mit konstanter Wahrscheinlichkeit $p$. Es seien $p = 0.5$, und $m = 3$.

**1)** [15] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Trudy $m = 3$ Körbe in Serie wirft? Und was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aufgibt?

**2)** [10] Wie viele Liegestützen macht Trudy im Erwartungswert?

Zur Erinnerung:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{for } |q| < 1$$

## 3 Zoll (20 Punkte)

Pascal und Nicolas reisen zusammen an eine Konferenz in die USA. Am Zoll sind zum Glück gerade zwei Schalter frei (keine Warteschlange) und die beiden gehen jeweils an einen Schalter. Am einen Schalter sei die Bedienzeit exponentiell verteilt mit Parameter $\mu_1 = 10$ Personen pro Stunde, am anderen exponentiell verteilt mit Parameter $\mu_2 = 5$ Personen pro Stunde. Wer zuerst aus dem Zoll raus kommt, geht direkt ins Café und wartet auf den anderen.

**A)** `[5]` Wie lange dauert es, nachdem sie sich getrennt haben, bis der erste der beiden den Zoll verlässt? Geben Sie den Erwartungswert an und beschreiben Sie, wie die zugehörige Zufallsvariable verteilt ist.

**B)** `[15]` Wie lange muss der erste der beiden alleine im Café warten? Geben Sie wiederum den Erwartungswert und die Verteilung der Wartezeit an. Nehmen Sie an, dass beide gleich schnell ins Café laufen.

Zur Erinnerung: Die Wahrscheinlichkeitsdichte (probability density function) der Exponentialverteilung $exp(\mu)$ ist gegeben durch

$$f_\mu(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Und die kumulierte Verteilfunktion (cumulative density function) von $X \sim exp(\mu)$ ist

$$\mathbb{P}(X < t) = F_\mu(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

# 4 Schachbrettcity (25 Punkte)

In dieser Aufgabe werden Sie gebeten, dem Stadtpräsidenten von Schachbrettcity beim Aufbau seiner Stadt zu helfen. Er möchte die Häuser wie auf einem Sachbrett anordnen. Um genügend Platz für Strassen und Pärke zu haben, ordnet er aber an, dass in der direkten Nachbarschaft von einem Haus kein weiteres Haus gebaut werden darf. Das heisst, die 8 anliegenden Felder um jedes Haus müssen leer bleiben, siehe Figure 2. Der Einfachkeit halber nehmen wir an, dass die Stadt unendlich gross ist.

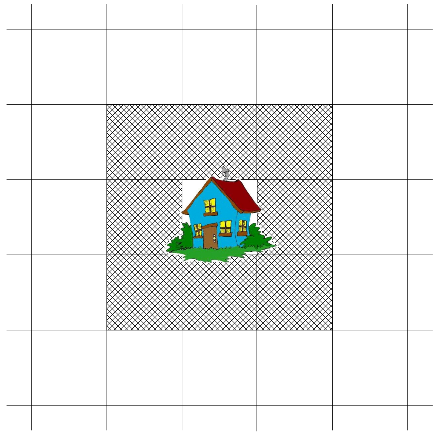

Figure 2: Wird ein Haus wie eingezeichnet gebaut, darf in den umliegenden 8 Feldern kein anderes Haus gebaut werden.

Sie kriegen nun sequentiell Anträge von Leuten, die auf einer bestimmten Zelle ein Haus bauen möchten, und Sie müssen jeweils sofort entscheiden, ob die Person die Zelle bebauen darf oder nicht. Ihr Ziel ist es, möglichst viele Häuser zu bauen, sie wissen allerdings nicht im Voraus, wieviele Anfragen überhaupt eingehen werden und nach welchen Zellen gefragt wird.

**A)** [20] Beschreiben Sie einen möglichst guten deterministischen online Algorithmus für das Problem. Der Algorithmus soll für jede Anfrage sofort entscheiden, ob die gewünschte Zelle bebaut werden darf oder nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

> **1)** Ist Ihr Algorithmus strikt $\rho$-kompetitiv für ein konstantes $\rho$? Falls ja, wie gross ist $\rho$?
>
> **2)** Ist Ihr Algorithmus optimal[1]?

**B)** [5] Beschreiben Sie einen *randomisierten* Algorithmus für das Problem, der im Erwartungswert eine bessere Kompetitivität hat als diejenige des besten deterministischen online Algorithmus.

[1] Optimal im Sinne von *best mögliche strikte Kompetitivität.*

# 5 Börsen Heini (32 Punkte)

Die Firma KoMP hat neue Aktien auf den Markt geworfen. Der Börsen Heini[2] hat eine Aktie bekommen und möchte sie *innerhalb der nächsten 20 Tage* zu einem möglichst hohen Preis verkaufen. Der Preis der Aktie ist durch die Aufsichtsbehörden reguliert, sodass er zu jedem Zeitpunkt nur in einem bestimmten Bereich sein kann: Zu jedem Zeitpunkt $t$ gilt für den Preis $p(t)$: $f(t) \leq p(t) \leq g(t)$.

Wir nehmen an, dass die Börse durchgehend geöffnet hat und der Börsen Heini seine Aktie zu jedem beliebigen Zeitpunkt verkaufen kann. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort zu den folgenden Fragen.

**A)** [8] Sei $f(t) = 30$ und $g(t) = 50$, siehe Figure 3. Wann muss der Börsen Heini seine Aktie verkaufen um eine möglichst gute kompetitive Ratio zu erhalten?

**B)** [8] Sei nun $f(t) = 30$ und $g(t) = 50 + t$, siehe Figure 4. Wann muss der Börsen Heini seine Aktie nun verkaufen, um eine möglichst gute kompetitive Ratio zu erhalten?

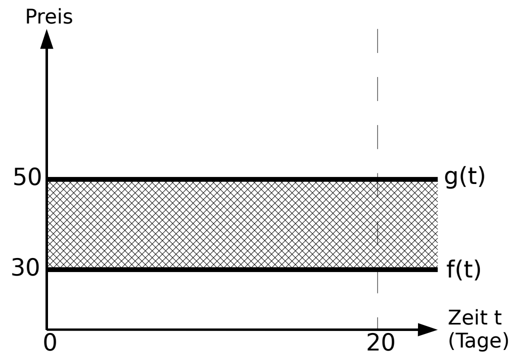


Figure 3: Der Preis ist im Intervall $[30, 50]$, unabhängig von $t$

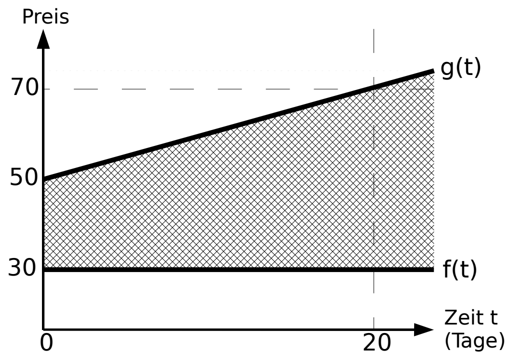


Figure 4: Der Preis ist im Intervall $[30, 50 + t]$, abhängig von $t$

**C)** [8] Schliesslich sei $f(t) = 30$ und $g(t)$ die eingezeichnete Kurve in Figure 5. Wann muss der Börsen Heini seine Aktie verkaufen, um eine möglichst gute kompetitive Ratio zu erhalten?

**D)** [8] Nun möchte Heini seine Strategie zum Verkauf der Aktie so wählen, dass die *Differenz* zum optimalen Verkaufspreis möglichst klein ist. Es sei $f(t) = 30$ und $g(t) = 50 + t$, siehe Figure 6. Wann muss der Börsen Heini verkaufen?

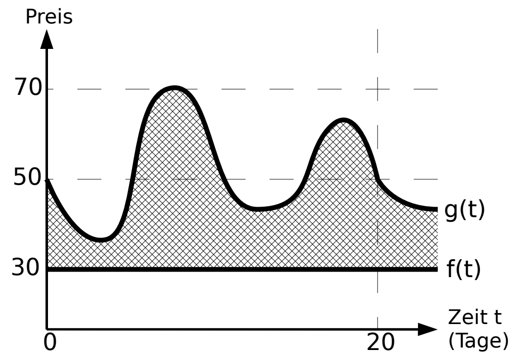


Figure 5: Der Preis ist nach oben beschränkt durch die eingezeichnete Funktion $g(t)$.

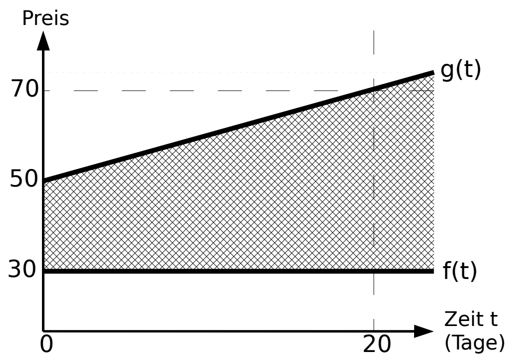


Figure 6: Der Preis ist im Intervall $[30, 50 + t]$, abhängig von $t$

[2] *Börsen Heini* ist ein Schweizer Ausdruck für eine Person, die viel an der Börse arbeitet.