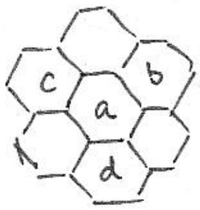
Competitive Analyse

1a)

- Unendlich lange anrufe
- Hexagonales Feld



Greedy

Wann immer ein Anruf kommt und sonst noch keiner in der Zelle oder einer Nachbarzelle ist, annehmen.

Wie gut im vergl. zum optimalen offline-algo?

- Benefit $B(\text{Algo}(\overset{\text{Sigma}}{\sigma}))$ für eine Input sequez σ = # der akzeptierten Anrufe.
- Kompetitivität: $B(A(\sigma)) \cdot \overset{\text{Rho}}{\rho} \geq B(\text{Opt}(\sigma))$ ρ-Komp.

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{B(\text{Opt}(\sigma))}{B(\text{Algo}(\sigma))}$$

D.h. Algo ist höchstens ρ mal schlechter.

⇒ wie argumentieren wir über ALLE σ?

1) BSP

$\sigma = \{a, b, c, d\}$

Algo: a *

Opt: b, c, d

$\rho \geq 3$ gibt eine untere Schranke für ρ.

* Algo muss 1. Anruf nehmen, da Algo ~~tat~~ $|\sigma|$ nicht kennt.

2) ~~Gibt~~ Gibt es schlechtere Bsp? - Nein.

Weil: Für jeden Anruf der Algo entgegen nimmt kann OPT höchstens 3 Anrufe entgegen nehmen, die Algo nicht kann.

$$\rho \leq \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho \overset{!}{=} 3}}$$

1b)

Länge der Anrufe $\in\ ]0, \infty[$

a) Algo muss ersten Anruf nehmen.

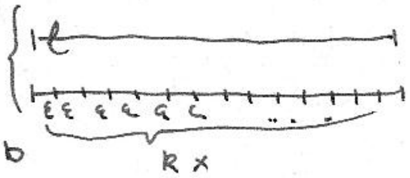
Wenn nicht, ist dies der einzige und $\rho = \frac{1}{0}$ "=" ∞. keine Komp.

b) Algo nimmt ersten Anruf.

$\sigma = \{ \ell, \underbrace{\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots \varepsilon}_{} \}$

↑ im feld a

k kurze Anrufe im feld b



$B(\text{Algo}(\sigma)) = 1$

$B(\text{Opt}(\sigma)) = k$

$\rho = k$ und für $k \to \infty$ $\rho \to \infty$

Somit können wir keinen Komp. Algo für dieses Problem bauen.

1c)

Randomisierter Algo

Nicht jeden Anruf akzeptieren sondern bloss mit wahrsch. p.

Allerdings problematisch, denn dann sendet der Gegner beliebig viele Anrufe auf dieselbe Zelle bis Algo annimmt.

Lösung Wenn einmal für eine Zelle nein gesagt, dann für immer.

Anruf in Zelle c

- Falls schon mal abgelehnt oder Anruf in $N(c)$ angenommen, dann: nein
- Sonst, mit Wahrscheinlichkeit p: ja und mit $(1-p)$ nein.

Wie gut ist dieser Algorithmus? Kompetitiv?

Randomized 2.97 Kompetitiver Ansatz

σ : Anruf Sequenz

$X(c)$: $\mathbb{P}$(Algo akzeptiert c) , $c \in \sigma$

$$\mathbb{E}(B(\text{Algo}(\sigma))) = \sum_{c \in \sigma} X(c)$$ Erwarteter Benefit von Algo

$A(\sigma)$: Akzeptierte Anrufe von OPT

$B(\text{OPT}(\sigma)) = |A(\sigma)|$

(⇒ Unendlich lange Anrufe : Beide Algos (ALGO und OPT) entscheiden beim ersten Anruf pro Zelle ob sie ihn nehmen oder nicht. D.h. σ enthält ~~bloss~~ max. ein Anruf pro Zelle.)

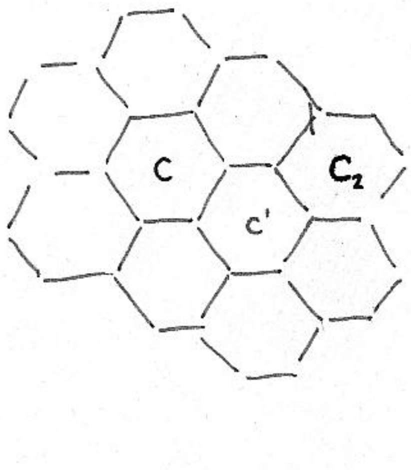
$\forall c \in A(\sigma)$: für jeden akzeptierten Anruf von OPT

$$b(c) := \underbrace{X(c)}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{c' \in N(c)} \frac{X(c')}{d(c')}}_{\beta}$$ Der erwartete Benefit von Algo (amortisiert)

$d(c') = |N(c') \cap A(\sigma)| \leq 3$; $N(c)$: Nachbarzellen von c ~~ebenfalls in σ~~ ~~(die ebenfalls einen Anruf kriegen)~~

α : Algo nimmt c ebenfalls?

β : Algo nimmt c nicht, dafür vielleicht ein nachbar c'
↳ dividieren durch $d(c')$, da c_2 von OPT c' ebenfalls zählt (höchstens drei mal)



$$\mathbb{E}(B(\text{Algo}(\sigma))) \stackrel{!}{=} \sum_{c \in A(\sigma)} b(c)$$

(Haben wir einen Anruf $\tilde{c} \in \sigma$ nicht angeschaut? Nein, alles i.O., denn wenn $\tilde{c} \notin A(\sigma)$, dann ist $\tilde{c}$ eine Nachbarzelle von einem $c \in A(\sigma)$.)

$q :=$ $\mathbb{P}$ (Kein Anruf wurde in $N(c)$ gegengenommen wenn ein Anruf in c ankommt).

$$b(c) = X(c) + \sum_{c' \in N(c)} \frac{X(c')}{d(c')}$$

$\exists c^*$ in $N(c)$ mit $X(c^*) = 1$

$$\geq \underbrace{q \cdot p}_{\text{Kein Anruf in } N(c)} + \underbrace{(1-q)\,\frac{1}{3}}_{\text{mind. 1 Anruf in } N(c)}$$

$\leftarrow d(c') \leq 3$

$$b(c) \geq q\left(p - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$p > \frac{1}{3}$, sonst sind wir sicher nicht 3-Kompetitiv!

$q \geq (1-p)^6$ (alle Nachbarn schon gefragt)

$b(c) \geq (1-p)^6 (p - 1/3) + 1/3$ max für welches p?

$$\frac{\partial b(c)}{\partial p} = -6(1-p)^5 (p - 1/3) + (1-p)^6 = (1-p)^5 \Big[\underbrace{-6p + 2 + 1 - p}_{7p = 3}\Big] \stackrel{!}{=} 0$$

$p = \frac{3}{7}$ 42.86 %

$$b(c) \geq \left(\frac{4}{7}\right)^6 \cdot \frac{2}{21} + \frac{1}{3} = \dots = 0.33665 > \frac{1}{3}$$

$B(OPT(\sigma)) = |A(\sigma)|$

$$B(Algo(\sigma)) = \sum_{c \in A(\sigma)} b(c) \geq |A(\sigma)| \cdot 0.33665$$

$\uparrow$ lin. of Expection

$$\rho = \frac{|A(\sigma)|}{B(Algo(\sigma))}$$

$$\rho \leq \frac{1}{0.33665} = 2.97$$

⚠ $q > (1-q)^6$ ist zu pessimistische Approx.

Genauere Analyse bringt ρ runter. $\Rightarrow$ Obere Schranke für ρ.